

Подобие в окружности-3. Теоремы Птолемея и о бабочке

1. Продолжение медианы треугольника ABC, проведенной из вершины A, пересекает описанную окружность в точке D. Найдите BC, если $AC = DC = 1$.

Теорема Птолемея. Произведение длин диагоналей вписанного в окружность четырехугольника равно сумме произведений длин двух пар его противоположных сторон.

2. Докажите теорему Птолемея. Указание: отметьте на диагонали AC такую точку T, что $\angle ABD = \angle TBC$, и рассмотрите подобные треугольники.
3. Дан параллелограмм ABCD. Окружность, проходящая через точку A, пересекает отрезки AB, AC и AD в точках P, Q, R соответственно. Докажите, что $AP \cdot AB + AR \cdot AD = AQ \cdot AC$.
4. В треугольнике ABC сторона BC равна полусумме двух других сторон. Докажите, что вершина A, середины сторон AB и AC и центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC лежат на одной окружности

Теорема о бабочке. Пусть через точку M, являющуюся серединой хорды PQ некоторой окружности, проведены две произвольные хорды AB и CD. Хорды AD и BC пересекают отрезок PQ в точках X и Y. Тогда точка M – середина отрезка XY.

5. Докажите теорему о бабочке. Указание: Опустите из центра окружности перпендикуляры на хорды PQ, AD и BC.

Домашнее задание

6. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около треугольника окружность в точке D. Докажите, что $2AD \geq AB + AC$. Указание: Примените теорему Птолемея.
7. Если расстояние между центрами двух окружностей больше суммы их радиусов, то они имеют четыре общие касательные. Докажите, что середины этих четырех отрезков лежат на одной прямой.
8. Центр окружности, касающейся стороны BC треугольника ABC в точке B и проходящей через точку A, лежит на стороне AC. Найдите площадь треугольника ABC, если $BC = 6$, $AC = 9$.
9. Точка M – середина хорды PQ некоторой окружности. Точки A и C расположены по одну сторону от прямой PQ. Через точку M проведены хорды AB и CD. Секущие BD и AC пересекают прямую PQ в точках X и Y. Докажите, что точка M является серединой отрезка XY.
10. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены хорды AC и AD, касающиеся данных окружностей. Прямые BC и BD пересекают окружности в точках P и Q. Докажите, что $CP = DQ$.

Степень точки, радикальная ось и радикальный центр

Напоминание. Геометрическое место точек, имеющих одинаковую степень относительно двух данных неконцентрических окружностей, называется **радикальной осью** данных окружностей. Она представляет собой прямую, перпендикулярную линии центров. Если центры трех окружностей образуют треугольник, то радикальные оси каждой пары окружностей пересекаются в одной точке, называемой **радикальным центром** трех окружностей.

1. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $BC = a$, радиус вписанной окружности равен r . Вписанная окружность касается катета AC в точке D. Найдите хорду, соединяющую точки пересечения окружности с прямой BD
2. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.
3. Три окружности попарно касаются в трех различных точках. Докажите, что их общие касательные, проходящие через эти точки, пересекаются в одной точке.
4. Как построить радикальную ось двух окружностей, не имеющих общих точек?
5. Докажите формулу Эйлера: $d^2 = R^2 - 2Rr$, где R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника, а d – расстояние между их центрами. Указание: Найдите степень центра вписанной окружности относительно описанной.
6. Докажите еще раз, что в любом треугольнике имеет место неравенство: $R \geq 2r$ (R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей), причем равенство $R = 2r$ имеет место только для правильного треугольника.

Домашнее задание

7. На дуге CD описанной окружности квадрата ABCD взята точка P. Докажите, что $PA + PC = \sqrt{2}PB$.
8. Из медиан треугольника ABC составлен треугольник $A_1B_1C_1$, а из медиан треугольника $A_1B_1C_1$ составлен треугольник $A_2B_2C_2$. Докажите, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны, причем коэффициент подобия равен $3/4$.
9. На стороне $AB=1$ квадрата ABCD построили снаружи равносторонний треугольник AKB. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CKD.
10. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках E и D соответственно. Отрезок DE пересекает стороны AB и BC в точках F и G. Пусть I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Докажите, что четырехугольник BFIG – ромб.
11. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята точка P. Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на A_2P , из A_2 — перпендикуляр на A_3P , из A_3 — на A_4P , из A_4 — на A_1P . Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекается в одной точке. Указание. Рассмотрите поворот на 90° вокруг центра квадрата.